

## 男子部中等科2年 数学

### 「図形と証明 — 三角形の合同条件を中心に —」

高田 貴 橋 隼人

中学の数学では、「証明」を本格的に始めて扱うものとして、平面上で三角形の合同条件に関する考察がある。図形における様々な性質を確認することと、証明するとはどういうことか、そのスタイルを身につけることを重視して授業を展開した。報告会を行うにあたっては、色々な模型を実際に作ってみて、試行錯誤しながら証明しようとする内容の意味を実感する機会を作るように努めた。

#### I. 報告会を行うにあたって勉強してきたこと

中等科2年生の数学の学習に、「証明」のスタイルを、二等辺三角形や平行四辺形などの図形を用いた学習がある。

それに先立ち、まず、図形として知っているものには、どんなものがあるか、をクラス全体で列挙した。四角形では、正方形、長方形、平行四辺形、ひし形、台形、三角形では、正三角形、直角三角形、二等辺三角形、そのほか、五角形、六角形や、円、ハート型、点、直線、曲線などが平面図形ではあげられ、立体では、立方体、直方体、球、円錐、四角錐などがあげられた。

次に、あげられた図形の分類をグループワークとして行い、平面図形と立体図形、角があるものとなないものなどの大枠の分類のほか、同じような形でも、包含関係になるものがあることを確認した。

その中で、三角形についてとりあげ、「どのような図形か(知らない人に説明するつもりで)、説明文を作ってみる」という課題を取り上げ、三角形、直角三角形、二等辺三角形、正三角形の定義文の考察を行った。「定義することを学ぶ」目標は、「議論をより自由にするためにより厳密にさだめることが必要であることを理解すること」にあるとかがんがえているが、中等科2年生においては、具体的な例を学習していない段階なので、あまり抽象的な議論を展開することよりも、三角形そのものを定義することは難しい、ということを実感することにとどめた。生徒の中からの意見としては、

「分かっているが説明が難しい」、「教科書と同じ説明しかできない」、「短いもの名前の図形でもその説明はとても難しい」などというものがあげられた。

その上で、直線、半直線、線分、点、多角形等の図形を順次、説明していった。直線の説明では「まっすぐな線」という表現が使われているが、ここは、既知のものとして、議論した。

報告会の基礎勉強として、二等辺三角形、平行四辺形に関する性質の証明を全員共通の課題として与え、報告するグループごとに発表して、証明のスタイルを勉強する機会とした。

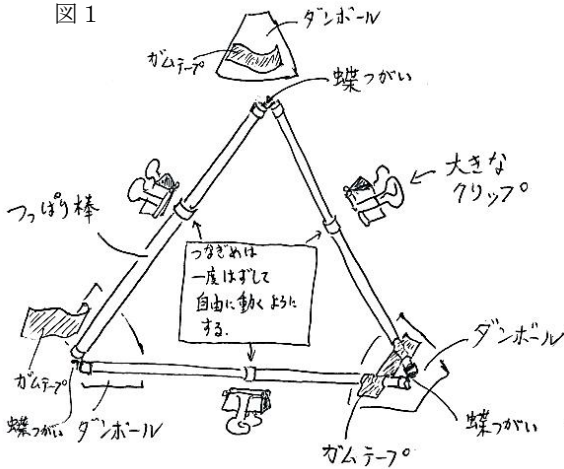
#### II. 報告会で作った模型

報告するにあたって、以下の4種類の模型を作製した。

- (1) 三角形の合同条件を説明する模型
- (2) 2点B, Cを結ぶ線分の垂直二等分線上に点Aを取ると、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形になることを表す模型
- (3) 平行四辺形の2つの対角は等しくなることを表す模型
- (4) ストローを用いた正多面体の制作

(1) 三角形の合同条件を説明する模型

図1



材料：長さの変えられる突っ張り棒 3本  
 突っ張り棒を固定するクリップ 3つ  
 蝶つがい 3つ  
 角を固定するためのダンボールとカムテーパー 3セット

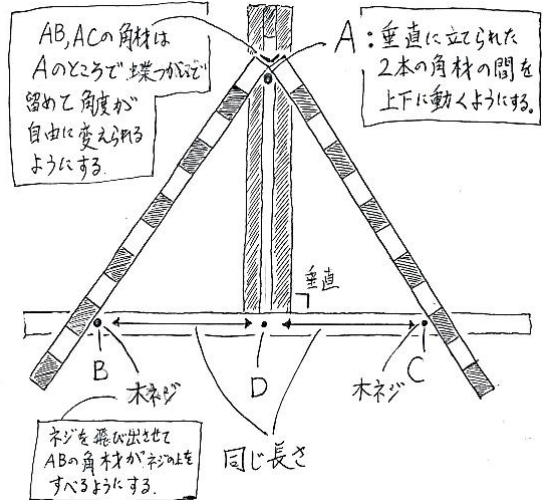
作り方：

- ① 3本の突っ張り棒の伸び縮みする金具を一度はずして、内側の管と外側の管が、自由に動くようにする。
- ② 3本の突っ張り棒の端を、蝶つがいで角度が自由になるように留める。
- ③ 辺を長さ決定する時には、クリップで太い管と細い管を挟んで、動かないようにする。
- ④ 角度を固定する時には、ダンボールとカムテーパーで、角をなしている2本の管を固定する。
- ⑤ 実際に、三角形の合同条件を満たすように固定すると三角形が形、大きさを変えなくなることが確認できる。

模型を実際に作る際、苦勞した点は、2本の突っ張り棒の角に蝶つがいを固定する所と、角を動かなくするために、どのような固定の仕方をすれば、発表に際して三角形が形を変えたり、固定されることを見せることができるか、という点であった。最終的に、上記のような方法で、発表することができた。

(2) 2点B,Cを結ぶ線分の垂直二等分線上に点Aを取ると、 $\triangle ABC$  は二等辺三角形になることを表す模型

図2



材料：角材5本、  
 縦の角材の上下に挟む小さな木片2つ  
 蝶つがい 1つ  
 長めの木ネジ 2本  
 金属の棒 1つ

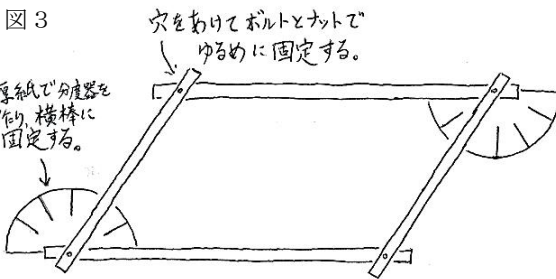
作り方

- ① 2つの角材に、等間隔に色を付けて、その端を蝶つがいでつなげる (ABとACになる)
- ② 1つの角材に木ネジを2本、頭の部分が角材の厚さの分だけ飛び出すように、左右につける。(点BとCになる)
- ③ ②でつけた木ネジの midpoint をDとし、Dのところから横棒に垂直になるように、縦の角材2本を隙間をあけて取り付ける。(隙間には、同じ厚さの角材を上下で挟み込むようにつける)
- ④ 縦に立てた2本の角材の間から金属の棒を出して、その上に、①の蝶つがいが乗るような形にする。色を付けた角材は、Aの金属の棒の上で角度を変えながら、また、BとCの木ネジの上を滑るようにする。
- ⑤ この模型のメモリを見ることにより、Aがどのような高さであっても、ABとACの長さは同じになることが観察できる。このことより、BCの

垂直二等分線上に A を取ると、 $\triangle ABC$  は二等辺三角形になることが確認される。

発表に際しては、数学的な証明を考え、それを模型上で実演しながら説明した。縦の角材が 1 m ぐらいの大きなものになったので、重力を利用して形が定まるような模型とした。

(3) 平行四辺形の 2 つの対角は等しくなることを表す模型



材料：厚さ 1 cm 程度で長さが 2 m ほどの角材 2 つ  
厚さ 1 cm 程度で長さが 1.5 m ほどの角材 2 つ  
ボルトとナット 各 4 つ  
分度器用の厚紙 2 枚

作り方

- ①角材で平行四辺形を作り、角のところに穴をあけて、ボルトとナットでゆるめに固定する。
- ②厚紙で大きな分度器を作り、対角線上の角一組のところの横棒に固定する。分度器には、15 度ずつぐらいの幅で、色分けしておく、変化の様子が観察しやすい。
- ③隣接している辺がなす角度を変えると、それに応じて、平行四辺形の形が変わるが、対角は、どのような形になっても等しくなることが確認される。

対角が等しいことの数学的な証明は、平行四辺形に 1 つの対辺を引いて、平行四辺形内部に 2 つの三角形を作り、その合同を証明することによって与えられるが、この模型でそのことが動的に観察できた。

この模型で、2 つの対角線を、ゴムなどの伸び縮みする素材で取り付け、その中点にそれぞれ印をつけておくと、平行四辺形の対角線は、常にその中点で交わることも確認できる。

(4) ストローを用いた正多面体の制作

① 三角形の作り方

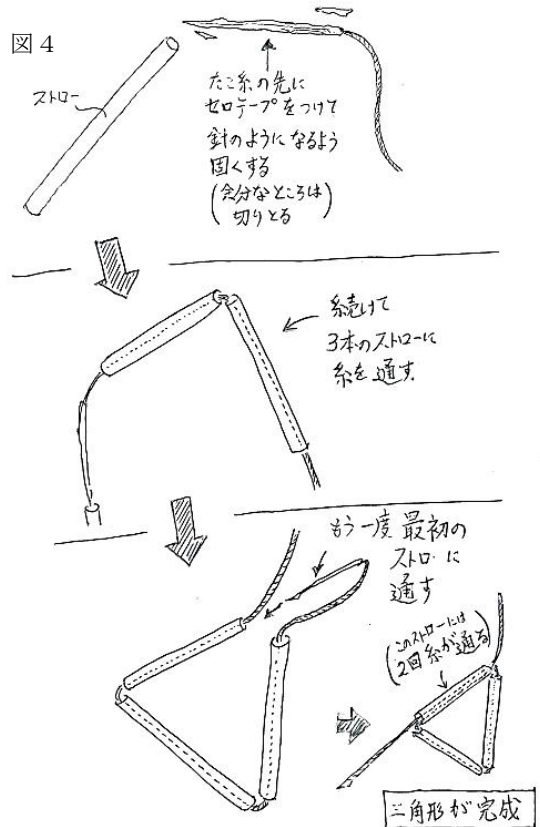


図 4 の様にして、ストローを三本使って三角形を作り、その周りに三角形を作っていく形を基本として、ストローで立体を作ることができる。このことを利用して、正多面体の作成をした。正多面体のうち正四面体、正八面体、正二十面体は、三角形を面としているので、そのまま作ることができるが、正六面体と正十二面体は、面の形がそれぞれ、正方形、正五角形なので、図 5 のように、そのままでは、形を保つことができない。たとえば、正方形の場合は、ひし形になってしまう。

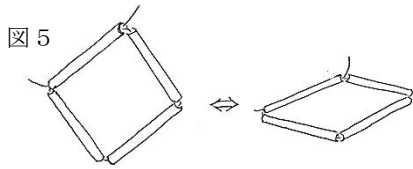


図5

そこで、図6のような斜線のようなストローを支えの構造として入れて、各面が正方形、正五角形として固定されるようにした。四角錐、五角錐を作ること、形を決定しているが、この側面はすべて三角形になっている。

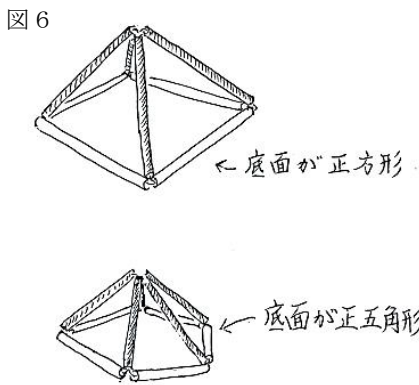
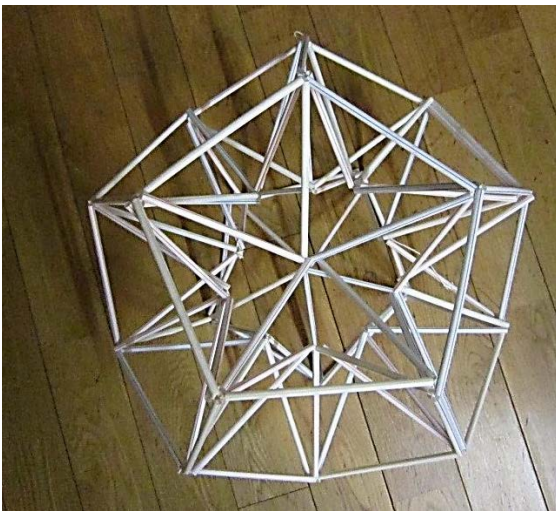


図6

この方法で、正十二面体を作ると、辺の数 30本に各面の支え  $5 \times 12 = 60$  本が加わるため、合計 90 本のストローが必要であった。



ストローを 90 本用いて作った正 12 面体の模型

報告にあたっては、実際に支えがない正六面体の模型も用意して、それが、斜めにつぶれてしまう様子も報告した。物の形が決定する際に、三角形の構造が重要であることが確かめられた。

最後に、これ等の構造が、建築物等の筋違にも使われていることであることを述べた。

### III. 報告会全体を通して

報告が、ただ、模型を作ることにならないよう、背景にある合同条件に関する証明は、全員が理解できるように勉強する機会を取りながら報告準備を進めるように心がけたが、『証明』することになかなかじめない生徒も少なからずいた。模型を作って現象を実感する中で、何が言いたいことであるのか、過程と結論はなんであるか、ということは何度も反芻することが大切であると考えて準備期間を過ごした。

学業報告会では、実際の報告の他に、自分たちで自分たちの時間を管理する、計画的に物事を進める、リーダーシップとフォロワーシップなども試される機会となり、これらの事に関しては、今後の課題となる多くの材料も与えられた。